Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный технический университет – УПИ
Институт образовательных информационных технологий

Н.В. Гредасова

Теория вероятностей

Учебное пособие

Научный редактор ст. пр. М.А. Плескунов

Екатеринбург
УГТУ-УПИ
2007

УДК 519.2 (075.8)
ББК 22.171я73
Г 79

Рецензенты: зав. кафедрой информационных систем в экономике УрГЭУ, д.ф.-м.н., проф. А.Ф. Шориков; зам. директора ИММ УрОРАН, к.ф.-м.н., ст.н.с. В.Е. Пак.

Гредасова Н.В.

Г 79 **Теория вероятностей:** учебное пособие / Н.В. Гредасова. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2007. 74 с.

ISBN

В учебном пособии излагаются основные понятия теории вероятностей, приведены классическое, статистическое и аксиоматическое определения вероятности. Рассмотрены теоремы сложения и умножения вероятностей, формула полной вероятности, формула Байеса, формулы Бернулли и Пуассона, локальная и интегральная теоремы Лапласа. Разобраны понятия дискретной и непрерывной случайных величин, а также их характеристики, такие как математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение. Введено понятие закона больших чисел. Приведено решение типовых задач.

Предназначается для студентов дистанционной формы обучения, а также для студентов факультета гуманитарного образования.

Библиогр.: 8 назв. Рис. 10.

Подготовлено кафедрой «Прикладная математика» и факультетом дистанционного образования.

УДК 519.2 (075.8)
ББК 22.171я73

ISBN

Оглавление

Закон больших чисел

Случайные события

1. Определение вероятности

1.1. Основные понятия

Теория вероятностей – это математическая наука, изучающая закономерности в случайных явлениях.

Введем основные понятия.

Опыт (испытание) – это осуществление определенного комплекса условий или действий, при которых происходит соответствующее явление.

Событие – возможный результат опыта.

Например, подбрасывание монеты – это опыт, а появление «герба» или «цифры» на верхней стороне после падения – это событие.

События обозначаются заглавными буквами латинского алфавита $A, B, C, \ldots$

Достоверное событие – событие, которое обязательно произойдет в данном опыте.

Невозможное событие – событие, которое не может произойти в данном опыте.

Случайное событие – событие, которое может произойти, а может и не произойти в данном опыте.

Два события называются **совместными** в данном опыте, если появление одного из них не исключает появления другого в этом опыте. Например, при подбрасывании двух симметричных монет произошли события A – выпал «герб» и B – выпала «цифра», они являются совместными.

Два события называются **несовместными**, если они не могут произойти вместе при одном и том же испытании. Например, несовместными являются попадание и промах при одном выстреле.

Несколько событий называются **несовместными**, если они попарно несовместны.

Два события называются **противоположными**, если появление одного из них равносильно непоявлению другого. Например, события: выпал «герб» и выпала «цифра» - при одном подбрасывании симметричной монеты являются противоположными.

Если одно из противоположных событий обозначено буквой A, то другое обозначают $\overline{A}$. Например, если A - «попадание» при одном выстреле по мишени, то $\overline{A}$ - «промах».

Полная группа событий – множество событий $A_1, A_2, ..., A_n$, если они попарно несовместны, появление одного и только одного из них является достоверным событием. Поясним понятие полной группы на примере.

Рассмотрим события, появляющиеся при подбрасывании игрального кубика (т.е. кубика, на гранях которого записаны цифры 1,2,3,4,5,6 или изображены знаки, соответствующие этим цифрам). Когда кубик упадет, то верхней гранью окажется грань с одной из этих цифр. Событие: «верхней гранью оказалась грань с цифрой k» обозначим через A_k $(k = \overline{1,6})$. События $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ образуют полную группу.

События считаются **равновозможными**, если нет оснований полагать, что одно событие является более возможным, чем другое.

Например, при подбрасывании монеты событие A (появление цифры) и событие B (появление герба) равновозможны, так как предполагается, что монета изготовлена из однородного материала, имеет правильную цилиндрическую форму и наличие чеканки не влияет на то, какая сторона монеты (герб или цифра) окажется верхней.

Элементарные исходы (элементарные события или шансы) – события, которые могут наступить в результате опыта и которые невозможно (или нет необходимости) разложить на более простые составляющие события. Например, события $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ - элементарные исходы при подбрасывании кубика.

Благоприятные шансы – элементарные исходы, при которых данное событие наступает.

Например, при подбрасывании игрального кубика элементарные исходы A_2, A_4, A_6 являются благоприятствующими событию «выпало четное число очков».

Пример 1.1. Подбрасываются 2 игральных кубика. Какому событию благоприятствует больше элементарных исходов: «сумма выпавших очков равна 7» или «сумма выпавших очков равна 8»?

Решение. Событию «сумма выпавших очков равна 7» благоприятствуют 6 исходов: (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1). Событию «сумма выпавших очков равна 8» благоприятствуют 5 исходов:

(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2).

Следовательно, первому событию благоприятствует больше элементарных исходов.

1.2. Классическое определение вероятности

Вероятностью события называется отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу.

Вероятность события A обозначается через $P(A)$. По определению

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число элементарных исходов, благоприятствующих событию A;

n – число всех равновозможных элементарных исходов опыта.

Это определение возникло на начальном этапе развития теории вероятностей.

Свойства вероятности

1. Вероятность достоверного события равна 1. Обозначим достоверное событие буквой U. Для достоверного события $m = n$, поэтому

$$P(U) = 1.$$

2. Вероятность невозможного события равна 0. Невозможное событие обозначим буквой V. Для невозможного события $m = 0$, поэтому

$$P(V) = 0.$$

3. Вероятность случайного события при классическом определении вероятности выражается положительным числом, меньшим 1. Так как для случайного события A выполняются неравенства

$0 < m < n$ или $0 < \dfrac{m}{n} < 1$, то

$$0 < P(A) < 1.$$

4. Вероятность любого события удовлетворяет неравенствам:

$$0 \le P(B) \le 1.$$

Пример 1.2. В урне 10 одинаковых по размеру и весу шаров, из которых 2 красных и 8 голубых. Из урны извлекают шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар окажется голубым?

Решение. Буквой A обозначим событие - «извлеченный шар оказался голубым». Испытание имеет 10 равновозможных элементарных исходов и 2 благоприятных исхода. Тогда

$$P(A) = \frac{2}{10} = 0,2.$$

Пример 1.3. Какова вероятность того, что в наудачу выбранном двузначном числе цифры одинаковы?

Решение. Двузначными являются числа от 10 до 99. Всего таких чисел 90. Одинаковые цифры имеют 9 чисел: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99. В данном случае $m = 9$, $n = 90$. Тогда

$$P(A) = \frac{9}{90} = 0,1.$$

1.3. Элементы комбинаторики

Комбинаторика – это раздел математики, который изучает способы подсчета числа элементов в конечных множествах.

Перестановки, сочетания и размещения без повторений

1. **Перестановки** – это множества элементов, состоящие из одних и тех же различных элементов и отличающиеся друг от друга только их порядком.

Число всевозможных перестановок из n элементов вычисляется по формуле:

$$P_n = n!,$$

где

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n;$$

$n!$ читается как «эн факториал».

Замечание

$$0! = 1.$$

Пример 1.4. Путь $n = 5$. Вычислить P_n.

Решение. $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$

2. **Размещениями** называются множества, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком.

Число всевозможных размещений определяется формулой:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1),$$

или

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Пример 1.5. Путь $n = 5,\ m = 3$. Вычислить A_n^m.

Решение. $A_n^m = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{5!}{2!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 60.$

3. **Сочетаниями** называются множества, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.

Число всевозможных сочетаний определяется формулой:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}.$$

Пример 1.6. Путь $n = 5$, $m = 3$. Вычислить C_n^m.

Решение. $C_n^m = \dfrac{5!}{(5-3)!3!} = \dfrac{5!}{2!\cdot 3!} = \dfrac{3!\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3!} = 10.$

Замечание

Для числа сочетаний справедливы равенства:

1) $C_n^m = C_n^{n-m}$;

2) $C_n^0 = C_n^n = 1$;

3) $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$;

4) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

Теорема о конечных множествах

Число всех подмножеств множества, состоящего из n элементов, равно 2^n.

Перестановки, сочетания и размещения связаны равенством:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}.$$

Выше предполагалось, что все n элементов различны. Если же некоторые элементы повторяются, то число множеств с повторениями элементов вычисляется по другим формулам.

Перестановки, размещения и сочетания с повторениями

1. Перестановки с повторениями:

$$\hat{P}_n(n_1, n_2, \ldots n_k) = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot \ldots \cdot n_k!},$$

где $n_1 + n_2 + \ldots n_k = n$.

Пример 1.7. Сколько различных перестановок можно сделать в слове *мотор*?

Решение. $\hat{P}_n = \dfrac{5!}{1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 60.$

2. Размещения с повторениями:

$$\hat{A}_n^m = n^m.$$

3. Сочетания с повторениями:

$$\hat{C}_n^m = C_{n+m-1}^m.$$

При решении задач комбинаторики используют следующие правила.

Правило суммы

Если некоторый объект A может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать либо A, либо B можно $m+n$ способами.

Правило произведения

Если некоторый объект A может быть выбран из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов (A,B) в указанном порядке может быть выбрана mn способами.

Пример 1.8. В ящике 15 красных, 9 голубых и 6 зеленых шаров. Наудачу вынимают 6 шаров. Какова вероятность того, что вынуты 1 зеленый, 2 голубых и 3 красных шара?

Решение. Пусть событие A - вынуты 1 зеленый, 2 голубых и 3 красных шара.

Число всех равновозможных исходов:

$$n = C_{30}^6,$$

число благоприятных исходов:

$$m = C_{15}^3 \cdot C_9^2 \cdot C_6^1.$$

Тогда искомая вероятность:

$$P(A) = \frac{C_{15}^3 \cdot C_9^2 \cdot C_6^1}{C_{30}^6} = \frac{24}{145}.$$

1.4. Частота события. Статистическое определение вероятности

Классическое определение вероятности предполагает, что все элементарные исходы равновозможны. Во многих практических задачах трудно указать основания, позволяющие считать, что все элементарные исходы равновозможны. В связи с этим появилась необходимость введения еще одного определения вероятности, называемого статистическим.

Введем понятие относительной частоты события.

Относительной частотой события, или **частотой**, называется отношение числа опытов, в которых появилось это событие, к числу всех произведенных опытов.

Обозначим частоту события A через $W(A)$, тогда по определению

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число опытов, в которых появилось событие A;

n – число всех произведенных опытов.

Свойства частоты события

1. Частота случайного события заключена между нулем и единицей:

$$0 < W(A) < 1.$$

2. Частота достоверного события U равна 1:

$$W(U) = 1.$$

3. Частота невозможного события V равна 0:

$$W(V) = 0.$$

Пример 1.9. По цели производится 20 выстрелов, причем было зарегистрировано 17 попаданий. Найти частоту поражения цели.

Решение. $W(A) = \dfrac{17}{20}$.

Наблюдения позволили установить, что относительная частота обладает свойствами статистической устойчивости: в различных сериях многочисленных испытаний (в каждом из которых может появиться или не появиться это событие) она принимает значения, достаточно близкие к некоторой постоянной. Эту постоянную считают вероятностью данного события.

Вероятностью события называется число, около которого группируются значения частоты данного события в различных сериях большого числа испытаний. Это определение вероятности называется **статистическим**.

Свойства вероятности, вытекающие из классического определения, сохраняются и при статистическом определении вероятности.

1.5. Геометрические вероятности

Классическое определение вероятности предполагает, что число элементарных исходов конечно. На практике встречаются опыты, для которых множество таких исходов бесконечно.

Чтобы преодолеть недостаток классического определения вероятности, введем **геометрическую вероятность** – вероятность попадания точки в область.

Пусть на плоскости задана квадрируемая область, т.е. область, имеющая площадь. Обозначим эту область G, а ее площадь S_G. В области G содержится область g площади S_g (рис.1.1).

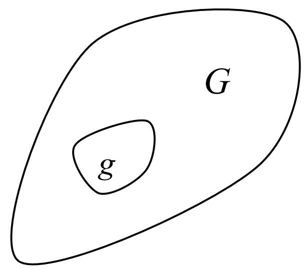

Рис.1.1

В область G наудачу брошена точка. Будем считать, что возможность брошенной точки попасть в некоторую часть области G пропорциональна площади этой части и не зависит от ее формы и расположения.

Пусть A – попадание брошенной точки в область g, тогда геометрическая вероятность этого события определяется формулой:

$$P(A) = \frac{S_g}{S_G}.$$

Аналогично вводятся понятия:

1) геометрической вероятности при бросании точки в пространственную область G объема V_G, содержащую область g объема V_g:

$$P(A) = \frac{V_g}{V_G};$$

2) геометрической вероятности при бросании точки на прямую длины L, содержащую прямую длины l:

$$P(A) = \frac{l}{L}.$$

В общем случае понятие геометрической вероятности вводится следующим образом. Обозначим меру области g (длину, площадь, объем) через $mes\, g$, а меру области G - через $mes\, G$ (mes от французского слова mesure , что значит мера).

Пусть A – событие «попадание брошенной точки в область g, которая содержится в области G». Вероятность попадания в область g точки, брошенной в область G, определяется формулой:

$$P(A) = \frac{mes\, g}{mes\, G}.$$

Пример 1.10. В круг вписан квадрат (рис.1.2). В круг бросается наудачу точка. Какова вероятность того, что точка попадет в квадрат?

Решение. Введем обозначения:

R – радиус круга;

a – сторона квадрата;

A – попадание точки в квадрат.

Площадь круга: $S = \pi R^2$,

площадь квадрата: $S_1 = a^2$.

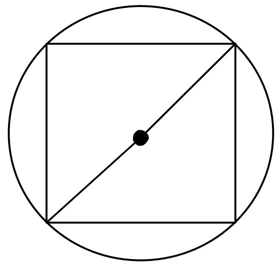

Рис. 1.2

По теореме Пифагора найдем $a : a = \sqrt{2}R$.

Тогда искомая вероятность равна:

$$P(A) = \frac{a^2}{\pi R^2} = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi} = 0,637.$$

1.6. Действия над событиями

Суммой (объединением) двух событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них.

Обозначение: $A + B$ или $A \cup B$.

Аналогично определяется и обозначается сумма n событий:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sum_{k=1}^{n} A_k \text{ или } A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k.$$

Произведением (пересечением) двух событий называется событие, состоящее в совместном их появлении.

Обозначение: AB или $A \cap B$.

Аналогично определяется и обозначается произведение n событий:

$$A_1 A_2 \ldots A_n \text{ или } A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n.$$

Понятие суммы и произведения событий распространяются и на бесконечные последовательности событий:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Если событие A обязательно произойдет при появлении некоторого другого события B, то говорят, что событие B представляет собой **частный случай** события A (рис. 1.3).

Обозначение: $B \subset A$ (B влечет A).

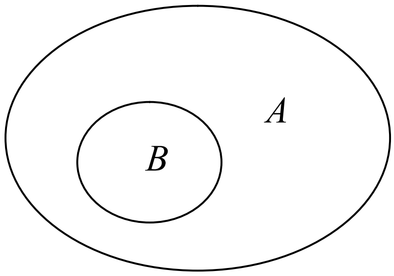

Рис. 1.3

Если $B \subset A$ и $A \subset B$, т.е. события A и B в данном опыте могут появиться или не появиться только вместе, то их называют **равносильными** или **эквивалентными.**

Обозначение: $A = B$.

Разностью событий A и B называется событие C, которое означает, что наступает событие A и не происходит событие B.

Обозначение: $A - B$ или $A \setminus B$.

Свойства операций объединения и пересечения

1) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = (A \cup C) \cup B = A \cup B \cup C$,

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = (A \cap C) \cap B = A \cap B \cap C$;

3) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

4) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.

Если U – достоверное событие, V – невозможное, A- любое событие, $\overline{A}$- событие, противоположное A, то выполняются следующие равенства:

$$A \cap \overline{A} = V \text{ или } A \cdot \overline{A} = V,$$

$$A \cup \overline{A} = U \text{ или } A + \overline{A} = U,$$

$$A \cup V = A \text{ или } A + V = A,$$

$$A \cap V = V \text{ или } A \cdot V = V,$$

$$A \cup U = U \text{ или } A + U = U,$$

$$A \cap U = A \text{ или } A \cdot U = A.$$

Пример 1.11. Стрелок производит 3 выстрела по мишени. Событие A_k - попадание в мишень при *k*-м выстреле (*k* = 1,2,3). Выразить через A_1, A_2, A_3 следующие события:

A - хотя бы 1 попадание;

B - 3 попадания;

C - 3 промаха;

D - хотя бы один промах;

E - не менее двух попаданий;

F - не более 1 попадания;

G - попадание после 1 выстрела.

Решение

1) $A = A_1 + A_2 + A_3$;

2) $B = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$;

3) $C = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$;

4) $D = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3}$;

5) $E = A_1 A_2 + A_1 A_3 + A_2 A_3$;

6) $F = \overline{A_1}\,\overline{A_2} + \overline{A_1}\,\overline{A_3} + \overline{A_2}\,\overline{A_3}$;

7) $G = \overline{A_1}(A_2 + A_3)$.

1.7. Аксиоматическое определение вероятности

Аксиомы теории вероятностей вводятся так, чтобы вероятность обладала основными свойствами частоты.

Пространство элементарных событий – это произвольное множество Ω, а его элементы ω **- элементарные события**.

События - подмножества множества Ω.

Обозначаются заглавными буквами латинского алфавита *A, B, C* и т.д.

Невозможное событие - пустое множество $\varnothing$.

Достоверное событие - множество Ω.

Случайное событие – любое собственное (т.е. отличное от Ω и $\varnothing$) подмножество множества Ω.

Событие $\overline{A} = \Omega - A$ называется **противоположным** событию A (т.е. A не произошло).

A и B называются **несовместными событиями**, если их произведение – невозможное событие, т.е. $AB = \varnothing$.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют **полную группу событий**, если $A_i A_k = \varnothing$ $(i \neq k)$ и $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$.

Пусть Ω - произвольное пространство элементарных событий, L – некоторая система случайных событий.

Система L случайных событий называется **алгеброй событий**, если

1) $\Omega \in L$;

2) если $A \in L, B \in L$, то $AB \in L$, $(A + B) \in L$, $(A \setminus B) \in L$.

Алгебра событий L называется σ**- алгеброй** или **борелевской алгеброй,** если из того, что

$A_n \in L$ (*n=1,2,3,….*), следует, что

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in L, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in L.$$

Числовая функция $P(A)$, определенная на алгебре событий *L*, называется **вероятностью**, если выполняются следующие аксиомы.

1. Каждому событию из L ставится в соответствие неотрицательное число $P(A)$ – его вероятность, т.е. для всех $A \in L$

$$P(A) \geq 0.$$

2. Вероятность достоверного события равна 1, т.е.

$$P(\Omega) = 1.$$

3. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т.е. если $AB = \varnothing$,

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Для решения задач, связанных с бесконечными последовательностями событий, вводится еще одна аксиома.

4. **Аксиома непрерывности**

Для любой убывающей последовательности $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ событий из L такой, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0.$$

Тройка (Ω, L, P), в которой L является σ- алгеброй и P удовлетворяет аксиомам 1-4, называется **вероятностным пространством.**

Пример 1.12. Подбрасывают два игральных кубика. Чему равна вероятность того, что сумма очков, выпавших на обоих кубиках, не превзойдет 5?

Решение. Пусть n_1 - число очков выпавших на первом кубике; n_2 - на втором.

Пространство элементарных событий – это множество пар (n_1, n_2):

$$\Omega = \left\{(n_1, n_2) : n_1, n_2 = 1,2,3,4,5,6\right\}.$$

Событие A имеет вид:

$$A = \left\{(n_1, n_2) : n_1, n_2 = 1,2,3,4,5,6; n_1 + n_2 \le 5\right\}.$$

Множество Ω содержит 36 элементов, множество A - 10 элементов:

$$A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1)\}.$$

Тогда $P(A) = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Имеется собрание сочинений из 6 томов некоторого автора. Все 6 томов расставляются на книжной полке случайным образом. Какова

вероятность того, что тома расположатся в порядке 1, 2, 3, 4, 5, 6 или 6, 5, 4, 3, 2, 1?

Ответ: 1/120.

2. На 8 одинаковых карточках написаны буквы И, Я, Л, З, Г, О, О, О. Эти карточки наудачу разложены в ряд. Какова вероятность того, что получится слово ЗООЛОГИЯ?

   Ответ: 1/360.

3. В зрительном зале забронировано 10 мест для приглашенных гостей. Пришли 7 приглашенных. Найти вероятность того, что четверо из пришедших гостей займут определенные для каждого из них места, если гости занимают места случайным образом.

   Ответ: 1/5040.

4. В бригаде 4 женщины и 3 мужчины. Среди членов бригады разыгрывается 4 билета в театр. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся две женщины и двое мужчин?

   Ответ: 18/35.

5. Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в этот круг правильного треугольника. Предполагается, что вероятность попадания точки в треугольник пропорциональна площади треугольника и не зависит от его расположения относительно круга.

   Ответ: $\dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

6. Наудачу взяты два неотрицательных числа, каждое из которых не больше единицы. Найти вероятность того, что сумма $x+y$ этих чисел не превышает единицы, а их произведение xy не больше $2/9$?

   Ответ: $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}\ln 2$.

2. Основные теоремы

2.1. Теоремы сложения и умножения вероятностей

1. **Теорема сложения вероятностей двух событий**

Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

2. **Теорема сложения вероятностей двух несовместных событий**

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

3. **Теорема сложения вероятностей *n* несовместных событий**

Вероятность суммы n несовместных событий $A_1, A_2, ..., A_n$ равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n).$$

Замечания

1. Сумма вероятностей событий $A_1, A_2...A_n$, образующих полную группу, равна 1:

$$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1.$$

2. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Если обозначить $P(A)=p,\ P(\overline{A})=q$, то последняя формула примет вид

$$p+q=1.$$

Вероятность события B при условии, что произошло событие A, называется **условной вероятностью** события B и обозначается

$$P(B/A),\text{ или } P_A(B).$$

4. **Теорема умножения вероятностей двух событий**

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло:

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B).$$

Событие *B* называют **независимым от события *A*,** если $P(B/A) = P(B)$, т.е. вероятность события *B* не зависит от того, произошло ли событие *A*. В этом случае и **событие *A* является независимым от события *B*,** т.е. свойство независимости является взаимным.

Если *A* и *B* независимы, то независимы $\overline{A}$ и B, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

5. **Теорема умножения вероятностей двух независимых событий**

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

6. **Теорема умножения вероятностей *n* событий**

Вероятность произведения *n* событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, вычисленных в предположении, что все предыдущие события наступили.

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)...P(A_n/A_1A_2...A_{n-1}).$$

События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются **независимыми в совокупности** или **независимыми**, если они попарно независимы, а также независимы каждое из них и произведение *k* остальных (*k*=2,3,…*n-1*).

Замечание

Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ независимы, то противоположные им события $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$ также независимы.

7. **Теорема умножения вероятностей *n* независимых событий**

Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ независимы, то вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)...P(A_n).$$

Это является необходимым и достаточным условием независимости событий $A_1, A_2, ..., A_n$.

8. **Теорема сложения вероятностей *n* независимых событий**

Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, ..., A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2...\overline{A}_n) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)...P(\overline{A}_n).$$

Пример 2.1. Вероятность попадания в мишень для первого спортсмена – 0,8, а для второго – 0,7. Спортсмены независимо друг от друга сделали по одному выстрелу. Найти вероятность того, что

1) оба спортсмена попали в мишень;
2) хотя бы один попал в мишень;
3) ни один не попал в мишень;
4) только один попал в мишень.

Решение. Введем обозначения:

A- первый спортсмен попал в мишень;

$\overline{A}$ - первый спортсмен не попал в мишень;

B- второй спортсмен попал в мишень;

$\overline{B}$ - второй спортсмен не попал в мишень.

1. Так как события A и B независимые, то

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0,8 \cdot 0,7 = 0,56.$$

2. Так как события A и B совместны, то

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) =$$
$$= 0,8 + 0,7 - 0,56 = 0,94.$$

3. Так как сумма вероятностей противоположных событий равна 1, то

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,8 = 0,2;$$
$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,7 = 0,3.$$

$$P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06.$$

Другой способ:

$$P(\overline{A}\overline{B}) = 1 - P(A + B) = 1 - 0,94 = 0,06.$$

4. Возможны две ситуации:

первый попал, второй не попал или второй попал, первый не попал, тогда

$$P(\overline{A}B + A\overline{B}) = P(\overline{A}B) + P(A\overline{B}) =$$
$$= P(\overline{A}) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(\overline{B}) =$$
$$= 0,2 \cdot 0,7 + 0,8 \cdot 0,3 = 0,34.$$

Пример 2.2. В урне 6 голубых, 5 красных и 4 белых шара. Из урны поочередно извлекают шар, не возвращая его обратно. Найти вероятность того, что при первом извлечении появится голубой шар, при втором – красный, при третьем – белый.

Решение. Введем обозначения:

A – при первом извлечении появится голубой шар;

B – при втором извлечении появится красный шар;

C – при третьем извлечении появится белый шар.

Искомая вероятность равна:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B/A)P(C/AB) = \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} = \frac{4}{91}.$$

Пример 2.3. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы: $p_1 = 0,75$; $p_2 = 0,8$; $p_3 = 0,85$. Какова вероятность хотя бы одного попадания при одном залпе из всех этих орудий?

Решение. Введем обозначения:

A- хотя бы одно попадание;

A_1 - попадание первого орудия;

A_2 - попадание второго орудия;

A_3 - попадание третьего орудия.

Вероятности событий, противоположных событиям A_1, A_2, A_3, соответственно равны:

$$P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0,75 = 0,25;$$
$$P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0,8 = 0,2;$$
$$P(\overline{A}_3) = 1 - P(A_3) = 1 - 0,85 = 0,15.$$

Искомая вероятность:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) = 1 - 0,25 \cdot 0,2 \cdot 0,15 = 0,9925.$$

2.2. Формула полной вероятности

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, которые образуют полную группу. Пусть известны вероятности этих событий: $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$ и условные вероятности события A: $P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n)$. Найдем вероятность события A.

Теорема. *Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из событий* $H_1, H_2, ..., H_n$, *образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:*

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A/H_n) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i).$$

Эту формулу называют «формулой полной вероятности».

События $H_1, H_2, ..., H_n$ называются **гипотезами**.

Пример 2.4. На сборку попадают детали с трех автоматов. Известно, что первый автомат дает 0,1% брака, второй – 0,2%, третий – 0,3%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 1000, со второго – 2000 и с третьего – 3000 деталей.

Решение. Введем обозначения:

A - на сборку поступила бракованная деталь;

H_1 - деталь изготовлена на первом автомате;

H_2 - деталь изготовлена на втором автомате;

H_3 - деталь изготовлена на третьем автомате.

Найдем вероятности гипотез:

$$P(H_1) = \frac{1000}{6000} = \frac{1}{6},$$
$$P(H_2) = \frac{2000}{6000} = \frac{1}{3},$$
$$P(H_3) = \frac{3000}{6000} = \frac{1}{2}.$$

Найдем условные вероятности:

$$P(A/H_1) = 0,001,$$
$$P(A/H_2) = 0,002,$$
$$P(A/H_3) = 0,003.$$

Искомая вероятность равна:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) =$$
$$= \frac{1}{6}\cdot 0,001 + \frac{1}{3}\cdot 0,002 + \frac{1}{2}\cdot 0,003 \approx 0,0023.$$

2.3. Формулы Бейеса

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, которые образуют полную группу. Пусть известны вероятности этих событий: $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$ и условные вероятности события A: $P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n)$. Произведен опыт, в результате которого появилось событие A. Условные вероятности событий $H_1, H_2, ..., H_n$ относительно события A определяются **формулами Бейеса**:

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)},$$

или

$$P(H_k / A) = \frac{P(H_k)P(A / H_k)}{P(A)},$$

где $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$ - формула полной вероятности.

Замечание

Вероятности $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$ событий $H_1, H_2, ..., H_n$ называются **априорными вероятностями** (от латинского *a priori*, что означает «сперва», т.е. в данном случае до того, как был произведен опыт). Вероятности $P(H_1 / A), P(H_2 / A), ..., P(H_n / A)$ тех же событий называются **апостериорными вероятностями** (от латинского *a posteriori*, что означает «после», т.е. в данном случае после опыта).

Пример 2.5. На склад поступает продукция трех фабрик, причем продукция первой фабрики составляет 20%, второй – 46% и третьей – 34%. Известно, что средний процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 3%, для второй – 2%, для третьей – 1%. Найти вероятность того, что наудачу взятое нестандартное изделие произведено первой фабрикой.

Решение. Введем обозначения:

A- взято нестандартное изделие;

H_1 - изделие изготовлено на первой фабрике;

H_2 - изделие изготовлено на второй фабрике;

H_3 - изделие изготовлено на третьей фабрике.

Найдем вероятности гипотез:

$$P(H_1) = 0,2,$$
$$P(H_2) = 0,46,$$
$$P(H_3) = 0,34.$$

Найдем условные вероятности:

$$P(A/H_1)=0,03,$$
$$P(A/H_2)=0,02,$$
$$P(A/H_3)=0,01.$$

Искомая вероятность равна:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)}=$$

$$=\frac{0,2\cdot 0,03}{0,2\cdot 0,03+0,46\cdot 0,02+0,34\cdot 0,01}\approx 0,322\,.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

   Ответ: 0,14.

2. Студент знает ответы на 20 вопросов из 26. Предположим, что вопросы задаются последовательно один за другим. Найти вероятность того, что три подряд заданные вопроса счастливые.

   Ответ: 57/115.

3. Три исследователя, независимо один от другого, производят измерения некоторой физической величины. Вероятность того, что первый исследователь допустил ошибку при считывании показаний прибора, равна 0,1. Для второго и третьего исследователей эта вероятность соответственно равна 0,15 и 0,2. Найти вероятность того, что при однократном измерении хотя бы один из исследователей допустит ошибку.

   Ответ: 0,388.

4. На фабрике, изготавливающей болты, первая машина производит 30%, вторая – 25%, третья – 45% всех изделий. Брак в их продукции

составляет соответственно 2%, 1%, 3%. Найти вероятность того, что случайно выбранный болт оказался стандартным.

Ответ: 0,978.

5. Имеются три урны с шарами. В первой находится 5 голубых и 3 красных шара, во второй – 4 голубых и 4 красных, в третьей – 8 голубых. Наугад выбирается одна из урн и из нее наугад извлекается шар. Какова вероятность того, что он окажется красным?

   Ответ: 0,292.

6. Рабочий обслуживает 3 станка, на которых обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка равна 0,01, для второго – 0,02, для третьего – 0,03. Обработанные детали складываются в один ящик. Производительность первого станка в два раза больше, чем второго, а третьего в три раза меньше, чем второго. Какова вероятность того, что взятая наугад деталь будет бракованной?

   Ответ: 0,015.

7. Партия деталей изготовлена тремя рабочими, причем первый изготовил 35% всех деталей, второй – 40%, третий – всю остальную продукцию. Брак в их продукции составляет: у первого – 2%, у второго – 3%, у третьего – 4%. Случайно выбранная для контроля деталь оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она изготовлена третьим рабочим.

   Ответ: 0,345.

3. Повторение испытаний

3.1. Формула Бернулли

Если производятся испытания, при которых вероятность появления события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называются **независимыми относительно события A**.

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0 < p < 1)$, событие наступит ровно k раз (безразлично в какой последовательности), вычисляется по **формуле Бернулли**:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!m!}$, $q = 1 - p$.

Вероятность того, что в n испытаниях событие наступит:

1) менее k раз

$$P = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k-1);$$

2) более k раз

$$P = P_n(k+1) + P_n(k+2) + \ldots + P_n(n);$$

3) не менее k раз

$$P = P_n(k) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(n);$$

4) не более k раз

$$P = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k).$$

Пример 3.1. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка равна 0,7 и не зависит от номера выстрела. Найти вероятность того, что при 5 выстрелах произойдет ровно 2 попадания в мишень.

Решение.

$$P_5(2) = C_5^2 p^2 q^3 = \frac{5!}{2!3!}(0,7)^2(1-0,7)^3 = 0,1323.$$

3.2. Формула Пуассона

Пусть производятся n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p. Для определения вероятности k появлений события в этих испытаниях используют формулу Бернулли. Если же n велико, а p мало ($p \le 0,1$), то эта формула неудобна. При больших значениях

n вычисления по формуле Бернулли становятся громоздкими. В этом случае (n – велико, p – мало) используют асимптотическую **формулу Пуассона**:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

где $\lambda = np$ - среднее число появлений события в n испытаниях;

k - число появлений события в n независимых испытаниях.

Пример 3.2. Вероятность изготовления нестандартной детали $p = 0,004$. Найти вероятность того, что среди 1000 деталей окажется 5 нестандартных.

Решение. По условию $n = 1000,\quad p = 0,004,$ тогда $\lambda = np = 1000 \cdot 0,004 = 4.$ По формуле Пуассона искомая вероятность равна

$$P_{1000}(5) = \frac{4^5 \cdot e^{-4}}{5!} = \frac{1024}{120 \cdot e^4} \approx 0,1563.$$

3.3. Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Выше были приведены формулы Бернулли и Пуассона. Формулу Бернулли используют, когда n не велико. Формулу Пуассона используют, когда n велико, p мало. Если же n велико, а p не слишком мало и не слишком близко к 1, то используют теоремы Лапласа.

Локальная теорема Лапласа

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0 < p < 1)$, событие наступит ровно k раз (безразлично в какой последовательности), приближенно равна (тем точнее, чем больше n)

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

$$\text{где}\quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значения функции $\varphi(x)$ определяются по таблице.

Замечание

Функция $\varphi(x)$ четная, т.е. $\varphi(-x)=\varphi(x)$.

Пример 3.3. Вероятность появления события А в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что событие А произойдет 710 раз.

Решение. Из условия следует, что $n=900$, $p=0{,}8$, $k=710$. Так как n достаточно велико, то воспользуемся локальной теоремой Лапласа.

Вычислим значение *x:*

$$x=\frac{710-900\cdot 0{,}8}{\sqrt{900\cdot 0{,}8\cdot 0.2}}\approx -0{,}83.$$

Используя таблицу, определим $\varphi(x)$:

$$\varphi(-0{,}83)=\varphi(0{,}83)\approx 0{,}2827.$$

Искомая вероятность:

$$P_{900}(710)\approx\frac{1}{12}\cdot 0{,}2827\approx 0{,}0236.$$

Интегральная теорема Лапласа

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0<p<1)$, событие наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, приближенно равна

$$P(k_1;k_2)=\Phi(x'')-\Phi(x'),$$

где

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$$

- функция Лапласа,

$$x'=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}},\quad x''=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

Значения функции $\Phi(x)$ определяются по таблице.

Замечания

1. Функция $\Phi(x)$ нечетная, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.
2. Для значений $x > 5$ полагают $\Phi(x) = 0,5$.

Пример 3.4. Вероятность появления события А в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что событие А произойдет не менее 710 раз и не более 740 раз.

Решение. Из условия следует, что $n = 900$, $p = 0,8$, $k_1 = 710$, $k_2 = 740$.

Так как *n* достаточно велико, то воспользуемся интегральной теоремой Лапласа.

$$x' = \frac{710 - 900 \cdot 0,8}{\sqrt{900 \cdot 0,8 \cdot 0.2}} \approx -0,83; \quad x'' = \frac{740 - 900 \cdot 0,8}{\sqrt{900 \cdot 0,8 \cdot 0.2}} \approx 1,67.$$

По таблице значений функции Лапласа, учитывая нечетность функции, определяем

$$\Phi(x') = \Phi(-0,83) = -\Phi(0,83) \approx -0,2967;$$
$$\Phi(x'') = \Phi(1,67) \approx 0,4525.$$

$$P(710;740) = \Phi(x'') - \Phi(x') = \Phi(1,67) - \Phi(-0,83) =$$
$$= 0,4525 - (-0,2967) = 0,7492.$$

3.4. Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях

Число k_0 (наступления события в независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна *p*) называют ***наивероятнейшим***, если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях k_0 раз, превышает (или, по крайней мере, не меньше) вероятности остальных возможных исходов испытаний.

Наивероятнейшее число k_0 определяют из двойного неравенства

$$np - q \le k_0 < np + p,$$

где k_0 - целое число, причем:

1) если число $np - q$ - дробное, то существует одно наивероятнейшее число k_0;
2) если число $np - q$ - целое, то существует два наивероятнейших числа, а именно: $k_0 = np - q$ и $k_0 + 1 = np + p$;
3) если число np - целое, то наивероятнейшее число $k_0 = np$.

Пример 3.5. Товаровед осматривает 24 образца товаров. Вероятность того, что каждый из образцов будет признан годным к продаже, равна 0,6. Найти наивероятнейшее число образцов, которые товаровед признает годными к продаже.

Решение. По условию задачи $n = 24,\ p = 0{,}6,\ q = 0{,}4.$

Определим наивероятнейшее число годных к продаже образцов товаров:

$$24 \cdot 0{,}6 - 0{,}4 \le k_0 < 24 \cdot 0{,}6 + 0{,}6,$$
$$14 \le k_0 < 15.$$

Так как $np - q = 14$ - целое, то существует два наивероятнейших числа, а именно: $k_0 = 14$ и $k_0 + 1 = 15$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна 0,05. Какова вероятность того, что среди купленных 10 билетов окажется 2 выигрышных?

   Ответ: 0,0746.

2. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятность того, что магазин получит разбитых бутылок: а) ровно две; б) менее двух; в) более двух; г) хотя бы одну.

   Ответ: а) 0,224; б) 0,1992; в) 0,5768; г) 0,95.

3. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

   Ответ: 0,04565.

4. В партии из 768 арбузов каждый арбуз оказывается неспелым с вероятностью 0,25. Найти вероятность того, что количество спелых арбузов будет находиться в пределах от 564 до 600.

   Ответ: 0,8186.

5. Отдел технического контроля проверяет партию из 10 деталей. Вероятность того, что деталь стандартная, равна 0,75. Найти наивероятнейшее число деталей, которые будут признаны стандартными.

   Ответ: 8.

Случайные величины

4. Виды случайных величин

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Случайные величины обозначаются прописными буквами $X, Y, Z, ...,$ а их возможные значения строчными буквами с индексами $x_1, x_2, x_3, ...$

Дискретной (прерывной) случайной величиной называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Непрерывной случайной величиной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

5. Дискретные случайные величины

5.1. Закон распределения дискретной случайной величины

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Закон распределения дискретной случайной величины можно задавать таблично или аналитически (в виде формулы).

1. Табличный способ

При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая – их вероятности.

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

Такая таблица называется **рядом распределения** дискретной случайной величины.

Сумма вероятностей второй строки таблицы равна 1, т.е. $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

2. Аналитический способ

Закон распределения дискретной случайной величины можно задать в виде формулы

$$P(X = x_i) = p_i,\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Ряд распределения можно изобразить графически. Для этого в прямоугольной системе координат строят точки $M_1(x_1; p_1),\ M_2(x_2; p_2), ...,\ M_n(x_n; p_n),$ где x_i - возможные значения случайной величины X, p_i - соответствующие вероятности. Затем точки соединяют отрезками прямых. Полученную фигуру называют **многоугольником распределения** (рис. 5.1).

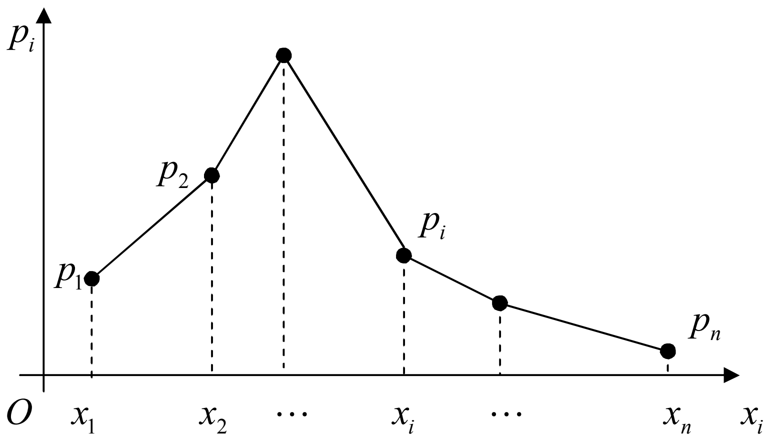

Рис.5.1

Пример 5.1. Дискретная случайная величина имеет закон распределения:

X	0,2	0,4	0,6	0,8	1
p	0,1	0,2	0,4	p_4	0,1

Чему равна вероятность p_4? Построить многоугольник распределения.

Решение. Так как должно выполнятся неравенство

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1, \text{ то}$$

$$p_4 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_5) = 1 - (0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}1) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

$$p_4 = 0{,}2.$$

В прямоугольной системе координат строим точки

$$M_1(0{,}2;0{,}1),\ M_2(0{,}4;0{,}2),\ M_3(0{,}6;0{,}4),\ M_4(0{,}8;0{,}2),\ M_5(1;0{,}1).$$

Соединив эти точки отрезками прямых, получим многоугольник распределения $M_1M_2M_3M_4M_5$ (рис. 5.2).

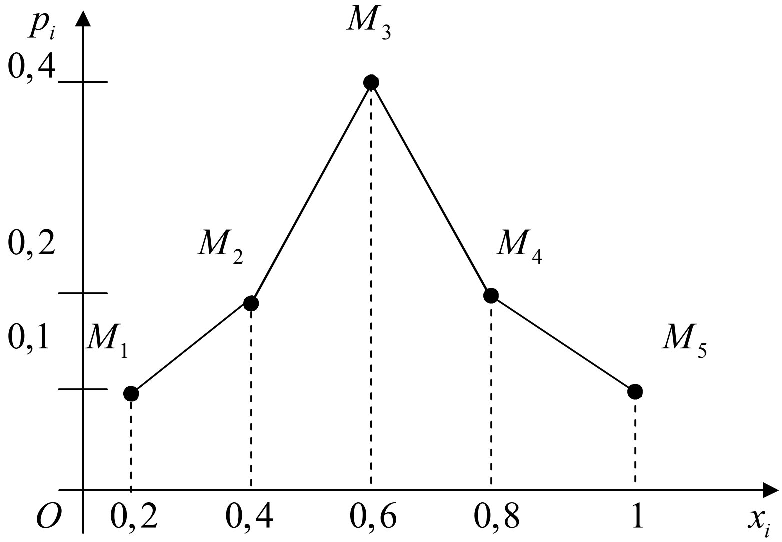

Рис. 5.2

5.2. Числовые характеристики дискретной случайной величины

Основными числовыми характеристиками случайных величин являются математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Математическое ожидание дискретной случайной величины

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Для обозначения математического ожидания используют и другие символы: EX, a, m_x.

Математическое ожидание дискретной случайной величины приближенно равно среднему арифметическому ее наблюдаемых значений. Вследствие этого математическое ожидание случайной величины называют ее ***средним значением***.

Математическое ожидание – это ***центр распределения.***

Дисперсия дискретной случайной величины

На практике часто требуется оценить рассеяние возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения.

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания

$$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2.$$

Теорема. *Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания:*

$$D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2.$$

Дисперсия дискретной случайной величины вычисляется по формулам:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i;$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - (M(X))^2.$$

Дисперсия есть величина неотрицательная, т.е.

$$D(X) \geq 0.$$

Среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины

Средним квадратическим отклонением дискретной случайной величины называют квадратный корень из ее дисперсии:

$$\sigma = \sqrt{D(X)}.$$

Пример 5.2. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

X	0	1	2
p	0,3	0,5	0,2

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. Находим математическое ожидание по формуле

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i:$$

$$M(X)=0\cdot 0,3+1\cdot 0,5+2\cdot 0,2=0,9.$$

Для вычисления дисперсии используем формулу

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^2 p_i:$$

$$D(X)=(0-0,9)^2\cdot 0,3+(1-0,9)^2\cdot 0,5+(2-0,9)^2\cdot 0,2=0,49.$$

Среднее квадратическое отклонение определяем по формуле $\sigma=\sqrt{D(X)}$:

$$\sigma=\sqrt{0,49}=0,7.$$

Замечание

Дисперсию можно было найти по формуле $D(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i-(M(X))^2$:

$$D(X)=0^2\cdot 0,3+1^2\cdot 0,5+2^2\cdot 0,2-(0,9)^2=1,3-0,81=0,49.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

X	1	2	3	4	5
p	p_1	0,15	0,3	0,25	p_5

   Найти вероятности p_1 и p_5, если известно, что p_5 в два раза больше p_1. Построить многоугольник распределения.

   Ответ: $p_1=0,1;\ p_5=0,2.$

2. В урне 7 шаров, из которых 4 голубых, а остальные красные. Из этой урны извлекают 3 шара. Найти закон распределения дискретной случайной величины X – числа голубых шаров в выборке.
3. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента 0,15. Составить закон распределения отказавших элементов.

4. Найти числовые характеристики $M(X), D(X), \sigma(X)$ дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения

X	-0,1	0	0,1	0,4
p	0,3	0,15	0,3	0,25

Ответ: $M(X) = 0{,}1,\ D(X) = 0{,}036,\ \sigma(X) = 0{,}190$.

5. Дискретная случайная величина *X* имеет только два возможных значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Вероятность того, что X примет значение x_1, равна 0,2. Найти закон распределения *X*, зная математическое ожидание $M(X) = 2{,}6$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = 0{,}8$.

6. Функция распределения случайной величины

Выше было рассмотрено, что закон распределения дискретной случайной величины можно задавать таблично или аналитически (в виде формулы). Однако такое описание случайной величины не является единственным, а главное, не универсально. Так, оно неприменимо для непрерывной случайной величины.

Для описания закона распределения случайной величины *X* возможен и другой подход: рассматривать не вероятности событий $X = x$ для разных *x* (как это имеет место в ряду распределения), а вероятности события *X*<*x*, где *x* – текущая переменная. Вероятность *P(X*<*x)*, очевидно, зависит от *x*, т.е. является некоторой функцией от *x*.

Функцией распределения случайной величины *X* называется функция *F(x)*, выражающая для каждого *x* вероятность того, что случайная величина *X* примет значение, меньшее *x*:

$$F(x) = P(X < x).$$

Геометрически это равенство можно истолковать так: *F(x)* есть вероятность того, что случайная величина примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки *x*.

Функцию $F(x)$ иногда называют ***интегральной функцией распределения*** или ***интегральным законом распределения***.

Свойства функции распределения

1. Значения функции распределения принадлежат отрезку $[0,1]$:
$$0 \le F(x) \le 1.$$
2. Функция распределения случайной величины есть неубывающая функция, т.е.
$$F(x_2) \ge F(x_1), \quad \text{если} \quad x_2 > x_1.$$
3. Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a;b)$, то
$$1)\ F(x) = 0 \ \text{при}\ x \le a; \qquad 2)\ F(x) = 1 \ \text{при}\ x \ge b.$$

Следствие. Если возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей оси x, то справедливы следующие предельные соотношения:
$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0; \qquad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$$

4. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в полуинтервале $[a;b)$, равна приращению функции распределения на этом полуинтервале:
$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

Возможный график функции распределения непрерывной случайной величины, все значения которой сосредоточены на интервале $(a;b)$, представлен на рис. 6.1.

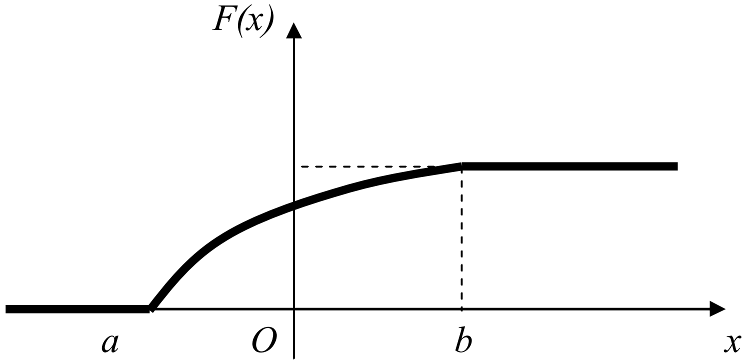

Рис.6.1

Пример 6.1. Дискретная случайная величина X задана таблицей распределения

X	1	4	8
p	0,3	0,1	0,6

Найти функцию распределения и построить ее график.

Решение. Если $x \le 1,$ то $F(x) = 0.$

Если $1 < x \le 4,$ то $F(x) = 0,3.$

Если $4 < x \le 8,$ то $F(x) = 0,4.$ Действительно, если $4 < x_1 \le 8,$ то значение $F(x_1)$ равно вероятности события $X < x_1,$ которое может осуществиться, когда X примет значение 1 (вероятность этого события равна 0,3) или значение 4 (вероятность этого события равна 0,1). Поскольку эти два события несовместны, то по теореме сложения вероятность события $X < x_1$ равна сумме вероятностей $0,3 + 0,1 = 0,4.$

Если $x > 8,$ то $F(x) = 1.$

Функция распределения будет иметь вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1, \\ 0,3 & \text{при} \quad 1 < x \le 4, \\ 0,4 & \text{при} \quad 4 < x \le 8, \\ 1 & \text{при} \quad x > 8. \end{cases}$$

График этой функции представлен на рис. 6.2.

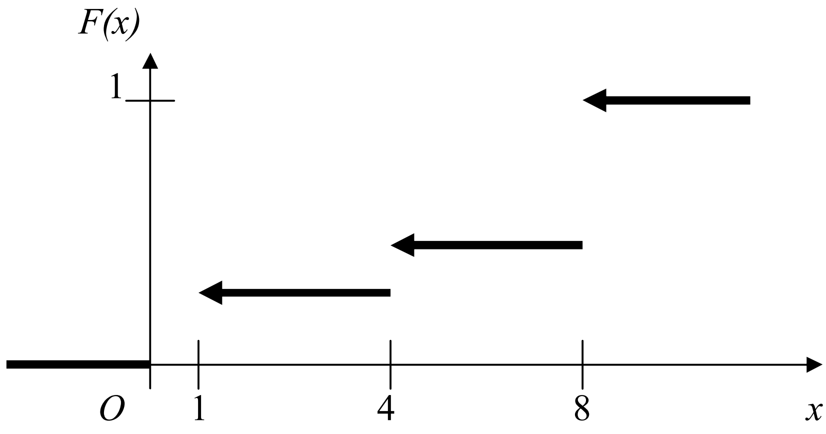

Рис. 6.2

Задачи для самостоятельного решения

1. Ряд распределения случайной величины X имеет вид

X	-5	2	3	4
p	0,3	0,4	0,2	0,1

Построить функцию распределения. Вычислить $P(X \geq 3{,}5)$.

$$\textit{Ответ:}\ F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \leq -5, \\ 0{,}3, & \text{если} \quad -5 < x \leq 2, \\ 0{,}7, & \text{если} \quad 2 < x \leq 3, \\ 0{,}9, & \text{если} \quad 3 < x \leq 4, \\ 1, & \text{если} \quad x > 4. \end{cases} \qquad P(X \geq 3{,}5) = 0{,}1.$$

2. Два покупателя независимо друг от друга делают по одной покупке. Вероятность того, что покупку сделает первый покупатель, равна 0,6, а вероятность того, что второй – 0,8. Случайная величина X – число покупок, сделанных покупателями. Найти и построить функцию распределения случайной величины X.

$$\textit{Ответ:}\ F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \leq 0, \\ 0{,}08, & \text{если} \quad 0 < x \leq 1, \\ 0{,}52, & \text{если} \quad 1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{если} \quad x > 2. \end{cases}$$

3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x \le 0,\\ x^2, & \text{при} \quad 0 < x \le 1,\\ 1, & \text{при} \quad x > 1.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате четырех независимых испытаний величина X ровно три раза примет значение, принадлежащее интервалу (0,25;0,75). Построить функцию распределения.

Ответ: 0,25.

7. Непрерывные случайные величины

7.1. Плотность распределения

Выше непрерывная случайная величина задавалась с помощью функции распределения. Этот способ не единственный. Непрерывную случайную величину можно задать используя другую функцию, которую называют плотностью распределения или плотностью вероятности (иногда ее называют ***дифференциальной функцией распределения***).

Плотностью вероятности (**плотностью распределения** или просто **плотностью**) непрерывной случайной величины X называется функция $f(x)$ – первая производная от функции распределения $F(x)$:

$$f(x)=F'(x).$$

Из этого определения следует, что функция распределения является первообразной для плотности распределения.

График плотности вероятности называется кривой распределения.

Замечание

Для описания распределения дискретной случайной величины плотность распределения неприменима.

Свойства плотности распределения

1. Плотность распределения - неотрицательная функция:
$$f(x) \geq 0.$$
2. Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен единице:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Геометрически это означает, что вся площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ох и кривой распределения, равна единице.

В частности, если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу *(a;b)*, то
$$\int_{a}^{b} f(x)dx = 1.$$

Теорема. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a;b), равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b:*
$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Зная плотность распределения *f(x)*, можно найти функцию распределения *F(x)* по формуле
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Пример 7.1. Случайная величина *X* задана функцией распределения
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leq 0, \\ \dfrac{1-\cos x}{2} & \text{при} \quad 0 < x \leq \pi, \\ 1 & \text{при} \quad x > \pi. \end{cases}$$

Найти плотность распределения величины *X*. Вычислить вероятность того, что случайная величина *X* примет значения из интервала $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Решение. По определению плотность распределения есть первая производная от функции распределения:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \dfrac{\sin x}{2} & \text{при} \quad 0 < x \le \pi, \\ 0 & \text{при} \quad x > \pi. \end{cases}$$

Вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ вычислим по формуле $P(a < X < b) = \int\limits_a^b f(x)dx$:

$$P\left(\frac{\pi}{3} < X < \frac{\pi}{2}\right) = \int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin x}{2} dx = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Плотность вероятности случайной величины X задана функцией

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \dfrac{x}{2} & \text{при} \quad 0 < x \le 2, \\ 0 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение из интервала (1,2).

Ответ: 0,75.

2. Функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -1, \\ \dfrac{(x+1)}{2} & \text{при} \quad -1 < x < 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Найти ее плотность. Чему равна вероятность того, что значение случайной величины X принадлежит интервалу (0,5;1).

Ответ: $p = 0,25$.

3. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 1,\\ x-\dfrac{1}{2} & \text{при} \quad 1<x\le 2,\\ 0 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$$

Найти функцию распределения *F(X)*.

Ответ: $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 1,\\ \dfrac{1}{2}(x^2-x) & \text{при} \quad 1<x\le 2,\\ 1 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$

7.2. Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Распространим определения числовых характеристик дискретных случайных величин на непрерывные величины.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины

Математическое ожидание непрерывной случайной величины *X*, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a;b]$, определяется формулой

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx.$$

Если возможные значения принадлежат всей оси *OX*, то

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Замечания

1. Если $Y=\varphi(X)$ - функция случайного аргумента *X*, возможные значения которого принадлежат интервалу (a,b), то

$$M\left[\varphi(X)\right]=\int_a^b \varphi(x)f(x)dx.$$

2. Если $Y=\varphi(X)$ - функция случайного аргумента X, возможные значения которого принадлежат всей оси OX, то

$$M\left[\varphi(X)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)f(x)dx.$$

Дисперсия непрерывной случайной величины

По аналогии с дисперсией дискретной величины определяется и дисперсия непрерывной величины.

Дисперсией непрерывной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

Если возможные значения X принадлежат отрезку $[a;b]$, то

$$D(X)=\int_a^b [x-M(X)]^2 f(x)dx \text{ или } D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-\left[M(X)\right]^2.$$

Если возможные значения принадлежат всей оси OX, то

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} [x-M(X)]^2 f(x)dx \text{ или } D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-\left[M(X)\right]^2.$$

Замечания

1. Если $Y=\varphi(X)$ - функция случайного аргумента X, возможные значения которого принадлежат интервалу (a,b), то

$$D\left[\varphi(X)\right]=\int_a^b \varphi^2(x)f(x)dx-\left[M\left[\varphi(X)\right]\right]^2.$$

2. Если $Y=\varphi(X)$ - функция случайного аргумента X, возможные значения которого принадлежат всей оси OX, то

$$D\left[\varphi(X)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x)f(x)dx-\left[M\left[\varphi(X)\right]\right]^2.$$

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется, как и для величины дискретной, равенством

$$\sigma = \sqrt{D(X)}.$$

Пример 7.2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ x^3 & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Найти числовые характеристики случайной величины X: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Решение. Сначала определим плотность распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ 3x^2 & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 0 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Находим математическое ожидание:

$$M(X) = \int_0^1 3x^2 dx = 3\frac{x^3}{4}\bigg|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

Находим дисперсию и среднеквадратическое отклонение:

$$D(X) = \int_0^1 \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 \cdot 3x^2 dx = 3\int_0^1 \left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}\right)x^2 dx =$$

$$= 3\int_0^1 \left(x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{16}x^2\right)dx = 3\left(\frac{x^5}{5} - \frac{3}{2}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{9}{16}\frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^1 =$$

$$= 3\left(\frac{1}{5} - \frac{3}{8} + \frac{3}{16}\right) = \frac{3}{80}.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{3/80} \approx 0{,}19.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти числовые характеристики $M(X), D(X), \sigma(X)$ непрерывной случайной величины *X*, заданной плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 2,\\ 0{,}5 & \text{при} \quad 2<x\le 4,\\ 0 & \text{при} \quad x>4.\end{cases}$$

Ответ: $M(X)=3,\ D(X)=1/3,\ \sigma(X)\approx 0{,}58.$

2. Случайная величина *X* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le -c,\\ 0{,}5+\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{c} & \text{при} \quad -c<x\le c,\\ 1 & \text{при} \quad x>c.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание этой величины.

Ответ: $M(X)=0.$

8. Свойства математического ожидания и дисперсии

8.1. Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:

$$M(C)=C.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(CX)=CM(X).$$

3. Математическое ожидание алгебраической суммы конечного числа случайных величин равно такой же сумме их математических ожиданий.

Например, для двух случайных величин:

$$M(X\pm Y)=M(X)\pm M(Y).$$

Прежде чем перейти к следующему свойству, введем понятие независимости случайных величин.

Две случайные величины называются ***независимыми***, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина. В противном случае случайные величины ***зависимы***.

Несколько случайных величин называются ***взаимно независимыми***, если законы распределения любого числа из них не зависят от того, какие возможные значения приняли остальные величины.

Произведение независимых случайных величин X и Y – это случайная величина XY, возможные значения которой равны произведениям каждого возможного значения X на каждое возможное значение Y; вероятности возможных значений произведения XY равны произведениям вероятностей возможных значений сомножителей.

4. Математическое ожидание произведения конечного числа независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

Например, для двух независимых случайных величин:

$$M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y).$$

8.2. Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$D(C)=0.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат:

$$D(C)=C^2D(C).$$

3. Дисперсия алгебраической суммы конечного числа независимых случайных величин равна сумме их дисперсий.

   Например, для двух независимых случайных величин:

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y),$$
$$D(X-Y)=D(X)+D(Y).$$

Пример 8.1. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = 8X - 5Y + 7$, если известно, что случайные величины X и Y независимы, $M(X) = 3$, $M(Y) = 2$, $D(X) = 1{,}5$, $D(Y) = 1$.

Решение. Используя свойства математического ожидания и дисперсии, получим

$$M(Z) = M(8X - 5Y + 7) = 8M(X) - 5M(Y) + 7 = 8 \cdot 3 - 5 \cdot 2 + 7 = 21.$$

$$D(Z) = D(8X - 5Y + 7) = 8^2 D(X) + 5^2 D(Y) + 0 = 64 \cdot 1{,}5 + 25 \cdot 1 = 121.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти математическое ожидание случайной величины $Z = 3X + 4Y$, если известны математические ожидания X и Y: $M(X) = 2$, $M(Y) = 6$.

   Ответ: $M(Z) = 30$.

2. Случайные величины X и Y независимы. Найти дисперсию случайной величины $Z = 2X + 3Y$, если известно, что $D(X) = 4$, $D(Y) = 5$.

   Ответ: $D(Z) = 61$.

9. Законы распределения случайных величин

9.1. Биномиальное распределение

Дискретная случайная величина X имеет **биномиальное распределение** с параметрами p и q, если она принимает значения $0,1,2,\ldots k,\ldots,n$ с вероятностями

$$p_k = P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$.

Как видно, вероятности $P(X = k)$ находятся по формуле Бернулли, о которой было сказано выше.

Следовательно, биномиальный закон распределения представляет собой закон распределения числа $X=k$ наступлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых оно может произойти с одной и той же вероятностью p.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по биномиальному закону:

$$M(X) = np, \quad D(X) = npq.$$

Пример 9.1. Монету подбрасывают 5 раз. Случайная величина X – число выпадений цифры. Записать закон распределения случайной величины X. Найти математическое ожидание и дисперсию.

Решение. Возможные значения случайной величины X:

$$x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = 2,\ x_4 = 3,\ x_5 = 4,\ x_6 = 5.$$

Вероятность того, что выпадет цифра $p = 0{,}5$, вероятность того, что выпадет герб $q = 1 - 0{,}5 = 0{,}5.$

Найдем вероятности возможных значений величины X по формуле Бернулли $p_k = P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$:

$$p_1 = P_5(0) = C_5^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}; \qquad p_4 = P_5(3) = C_5^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32};$$

$$p_2 = P_5(1) = C_5^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32}; \qquad p_5 = P_5(4) = C_5^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{32};$$

$$p_3 = P_5(2) = C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32}; \qquad p_6 = P_5(5) = C_5^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32}.$$

Собрав все данные в таблицу, получим закон распределения случайной величины X:

X	0	1	2	3	4	5
p	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32

Случайная величина X имеет биномиальный закон распределения. Найдем математическое ожидание и дисперсию по формулам:

$$M(X) = np; \quad D(X) = npq:$$

$$M(X) = 5 \cdot \frac{1}{2} = 2{,}5; \ \ D(X) = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1{,}25.$$

9.2. Геометрическое распределение

Дискретная случайная величина X имеет **геометрическое распределение,** если она принимает значения $k = 1, 2, 3, \dots$ (счетное множество значений) с вероятностями

$$p_k = P(X = k) = pq^{k-1},\ k = 1, 2, 3, \dots,$$

где $0 < p < 1,\ q = 1 - p$.

Случайная величина X, имеющая геометрическое распределение, представляет собой число испытаний Бернулли до первого успеха.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей геометрическое распределение, определяются по следующим формулам:

$$M(X) = \frac{1}{p},\quad D(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Пример 9.2. Проводится проверка большой партии деталей до обнаружения бракованной (без ограничения числа проверенных деталей). Составить закон распределения числа проверенных деталей. Найти его математическое ожидание и дисперсию, если известно, что вероятность брака для каждой детали равна 0,1.

Решение. Случайная величина X – число проверенных деталей до обнаружения бракованной – имеет геометрическое распределение с параметром $p = 0{,}1$. Используя формулу $p_k = P(X = k) = pq^{k-1},\ k = 1, 2, 3, \dots,$ построим закон распределения случайной величины X:

X	1	2	3	4	…	m	…
p	0,1	0,09	0,081	0,0729	…	$0{,}9^m \cdot 0{,}1$	…

Найдем математическое ожидание и дисперсию по формулам:

$$M(X) = \frac{1}{p};\quad D(X) = \frac{q}{p^2};$$

$$M(X) = \frac{1}{0{,}1} = 10;\quad D(X) = \frac{0{,}9}{0{,}1^2} = 90.$$

9.3. Гипергеометрическое распределение

Дискретная случайная величина X имеет **гипергеометрическое распределение,** если она принимает значения m с вероятностями

$$p_m = P(X = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},$$

где $m = 0,1,2,...,k;\ k = \min(n,M);\ M < N;\ n < N.$

Вероятность p_m является вероятностью выбора m объектов, обладающих заданным свойством, из множества n объектов, случайно извлеченных (без возврата) из совокупности N объектов, среди которых M объектов обладают заданным свойством.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей гипергеометрическое распределение с параметрами n, M, N, вычисляются по формулам:

$$M(X) = n\frac{M}{N};\quad D(X) = n\frac{M}{N-1}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{n}{N}\right).$$

Пример 9.3. В лотерее «Спортлото 6 из 45» денежные призы получают участники, угадавшие 3, 4, 5 и 6 видов спорта из отобранных случайно 6 видов из 45 (размер приза увеличивается с увеличением числа угаданных видов спорта). Найти закон распределения случайной величины X – числа угаданных видов спорта среди случайно отобранных шести. Какова вероятность получения денежного приза? Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

Решение. Случайная величина X имеет гипергеометрическое распределение с параметрами $n = 6,\ M = 6,\ N = 45.$

Используя формулу $p_m = P(X = m) = \dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},$ построим закон распределения случайной величины X:

X	0	1	2	3	4	5	6
p	0,40056	0,42413	0,15147	0,02244	0,00137	0,00003	0,0000001

Вероятность получения денежного приза

$$P(3 \le X \le 6) = \sum_{i=3}^{6} P(X = i) =$$

$$= 0,02244 + 0,00137 + 0,00003 + 0,0000001 \approx 0,024.$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию по формулам:

$$M(X) = n\frac{M}{N}; \quad D(X) = n\frac{M}{N-1}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{n}{N}\right):$$

$$M(X) = 6 \cdot \frac{6}{45} = 0,8; \quad D(X) = 6 \cdot \frac{6}{44} \cdot \left(1-\frac{6}{45}\right) \cdot \left(1-\frac{6}{45}\right) \approx 0,6145.$$

9.4. Закон Пуассона

Дискретная случайная величина X **распределена по закону Пуассона,** если она принимает целые значения $0,1,2,\ldots$ с вероятностями

$$p_k = P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k = 0,1,2,...,$$

где $\lambda > 0$ - параметр распределения.

Математическое ожидание и дисперсия пуассоновской случайной величины равны параметру распределения:

$$M(X) = \lambda; \quad D(X) = \lambda.$$

Пример 9.4. В течение часа коммутатор, установленный для включения телефонных аппаратов в офисах торговой фирмы, получает в среднем 90 вызовов. Считая, что число вызовов на любом отрезке времени распределено по закону Пуассона, составить ряд распределения случайной величины X – числа вызовов, поступающих на коммутатор в течение четырех минут.

Решение. В течение часа на коммутатор в среднем поступает 90 вызовов, поэтому среднее число вызовов, поступающих на коммутатор в течение четырех минут, равно $\frac{90}{60} \cdot 4 = 6$. Это означает, что математическое ожидание числа вызовов за 4 минуты равно $M(X) = 6$.

Используя формулу Пуассона $p_k = P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, $k = 0,1,2,...$, построим закон распределения случайной величины X:

X	0	1	2	3	…	m	…
p	0,0025	0,0149	0,0446	0,0892	…	$e^{-\lambda}\lambda^k / k!$	…

9.5. Равномерное распределение

Непрерывная случайная величина X **распределена равномерно** на отрезке $[a;b]$, если ее плотность вероятности *f(x)* постоянна на этом отрезке и равна нулю вне его, т.е.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 0, & x < a,\ x > b. \end{cases}$$

Функция распределения случайной величины, распределенной по равномерному закону, имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Графики *f(x)* и *F(x)* приведены на рис. 9.1.

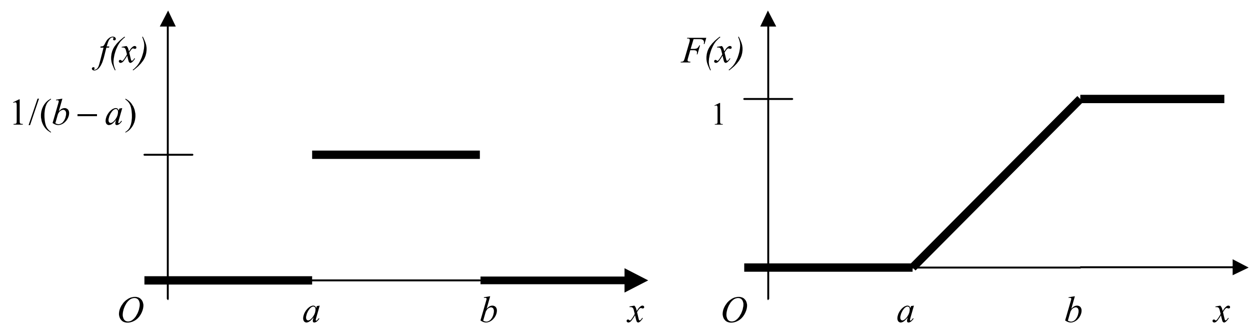

Рис. 9.1

Математическое ожидание и дисперсия равномерной случайной величины определяются по формулам:

$$M(X)=\frac{a+b}{2};\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Пример 9.5. Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ждать пассажиру придется не больше полминуты. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X – времени ожидания поезда.

Решение. Случайная величина X – время ожидания поезда на временном (в минутах) отрезке $[0;2]$ имеет равномерный закон распределения. Плотность распределения $f(x)=\frac{1}{2-0}=\frac{1}{2}$.

Вероятность того, что ждать пассажиру придется не больше полминуты, равна

$$P(X\le 0,5)=\int_0^{0,5}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}x\Big|_0^{0,5}=\frac{1}{4}.$$

Математическое ожидание и дисперсию равномерной случайной величины найдем из формул:

$$M(X)=\frac{a+b}{2};\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12};$$

$$M(X)=\frac{0+2}{2}=1;\quad D(X)=\frac{(2-0)^2}{12}=\frac{1}{3}.$$

9.6. Показательное (экспоненциальное) распределение

Непрерывная случайная величина X имеет **показательное распределение** с параметром λ, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

где $\lambda>0$.

Функция распределения случайной величины, распределенной по показательному закону, равна

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Графики *f(x)* и *F(x)* приведены на рис. 9.2.

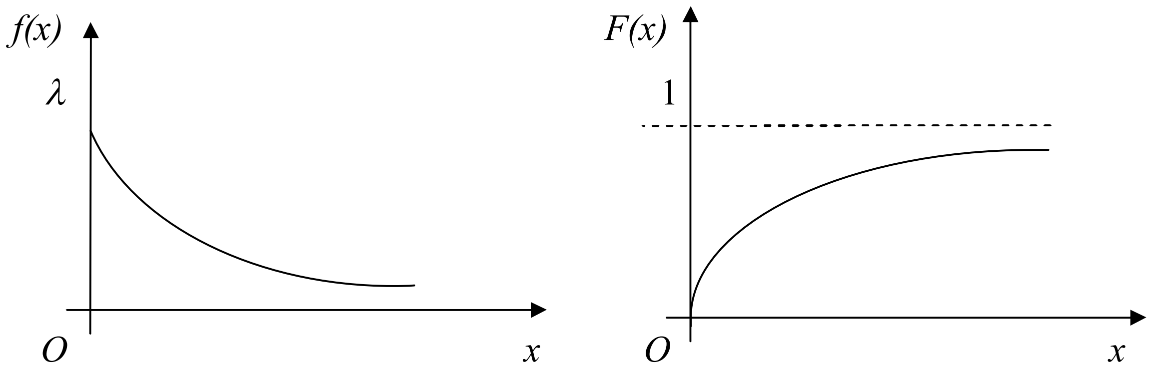

Рис. 9.2

Математическое ожидание и дисперсия показательно распределенной случайной величины *X* определяются по формулам:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Пример 9.6. Установлено, что время ремонта телевизоров есть случайная величина *X*, распределенная по показательному закону. Определить вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется не менее 20 дней, если среднее время ремонта телевизоров составляет 15 дней. Найти плотность вероятности, функцию распределения и среднее квадратическое отклонение.

Решение. По условию математическое ожидание $M(X)=\frac{1}{\lambda}=15,$ откуда $\lambda=1/15.$ Тогда плотность вероятности и функция распределения будут иметь вид:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{15}e^{-\frac{1}{15}x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{1}{15}x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется не менее 20 дней, равна

$$P(X \geq 20) = P(20 \leq X < +\infty) = \int_{20}^{+\infty} \frac{1}{15} e^{-\frac{1}{15}x} dx = 0,264.$$

Можно решить проще, используя функцию распределения:

$$P(X \geq 20) = 1 - P(X < 20) = 1 - F(20) = 1 - (1 - e^{-\frac{20}{15}}) = 0,264.$$

9.7. Нормальное распределение

Непрерывная случайная величина X имеет **нормальный закон распределения (закон Гаусса)** с параметрами a и σ, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где $\sigma > 0$.

Тот факт, что случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами a и σ, сокращенно записывается $X \sim N(a, \sigma)$.

Функция распределения нормальной случайной величины $X \sim N(a, \sigma)$ имеет вид:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

График плотности *f(x)* приведен на рис. 9.3.

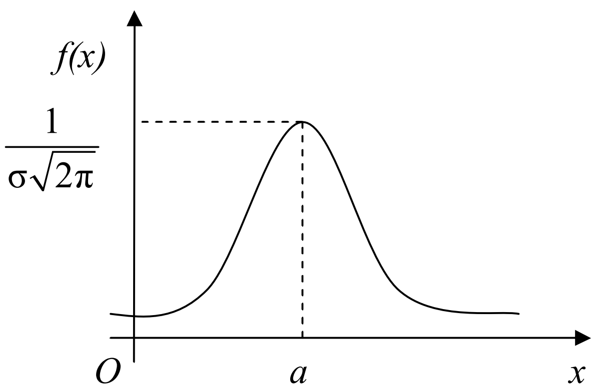

Рис. 9.3

График плотности нормального распределения называют ***нормальной кривой (кривой Гаусса).***

Если $a = 0$ и $\sigma = 1,$ то нормальное распределение с такими параметрами называется ***стандартным***, а нормальная кривая – ***нормированной.***

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по нормальному закону:

$$M(X) = a, \quad D(X) = \sigma^2.$$

Вероятность того, что случайная величина $X \sim N(a,\sigma)$ примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha,\beta),$ равна

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ - функция Лапласа.

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения нормально распределенной случайной величины X от ее математического ожидания a не превысит положительного $\delta,$ равна

$$P\left(|X - a| \le \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Правило трех сигм

Если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения, т.е.

$$P\left(|X - a| \le 3\sigma\right) = 0,9973.$$

На практике правило трех сигм применяют так: если распределение изучаемой случайной величины неизвестно, но условие, указанное выше, выполняется, то есть основания предполагать, что изучаемая величина распределена нормально; в противном случае она не распределена нормально.

Пример 9.7. На станке изготавливают шарики для подшипников. Номинальный диаметр шарика $d_0 = 5$ мм. Фактический размер диаметра шарика вследствие неточности изготовления представляет собой случайную величину X, распределенную по нормальному закону с математическим ожиданием $a = d_0 = 5$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}05$ мм. Найти процент шариков для подшипников, которые будут иметь диаметр от 4,8 до 5 мм.

Решение. Найдем вероятность попадания случайной величины X в интервал (4,8;5), применив формулу $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$

Учитывая, что $a = 5,\ \ \sigma = 0{,}05,\ \ \beta = 5,\ \ \alpha = 4{,}8,$ получим

$$P(4{,}8 < X < 5) = \Phi\left(\frac{5-5}{0{,}05}\right) - \Phi\left(\frac{4{,}8-5}{0{,}05}\right) = \Phi(0) - \Phi(-4).$$

Так как $\Phi(x)$ нечетная функция, то $\Phi(-4) = -\Phi(4)$. Используя таблицу значений функции Лапласа, найдем

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi(4) = 0{,}499968.$$

Искомая вероятность равна 0,499968. Это означает, что практически 50% изготавливаемых шариков для подшипников будут иметь размер диаметра от 4,8 до 5 мм.

Пример 9.8. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания X подчинены нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением $\sigma = 20$ г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 10 г.

Решение. Математическое ожидание случайных ошибок равно нулю. Используем формулу $P\left(|X - a| \le \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$:

$$P\left(|X| \le 10\right) = 2\Phi\left(\frac{10}{20}\right) = 2\Phi(0{,}5).$$

По таблице значений функции $\Phi(x)$ найдем $\Phi(0{,}5) = 0{,}1915$.

Тогда искомая вероятность равна

$$P\left(|X| \le 10\right) = 0{,}383.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть X – число выпадений шестерки при трех бросаниях игральной кости. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины X.

   Ответ: $M(X)=1/2;\ D(X)=5/12;\ \sigma(X)=\sqrt{15}/6.$

2. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке [0;4]. Найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.

   Ответ: $M(X)=2;\ \sigma(X)=2\sqrt{3}/3.$

3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(X)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 0,\\ 1-e^{-0,4x}, & \text{при} \quad x>0.\end{cases}$$

   Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.

   Ответ: $M(X)=2{,}5;\ \sigma(X)=2{,}5.$

4. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 20 и 5. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (15;25).

   Ответ: 0,6826.

5. При измерении детали получаются случайные ошибки, подчиненные нормальному закону с параметром $\sigma=10$ мм. Найти вероятность того, что измерение произведено с ошибкой, не превосходящей 15 мм.

   Ответ: 0,866386.

10. Закон больших чисел

Под **законом больших чисел** в *широком* смысле понимается общий принцип, согласно которому, по формулировке академика А.Н. Колмогорова, совокупное действие большого числа случайных факторов приводит (при некоторых весьма общих условиях) к результату, почти не зависящему от случая. Другими словами, при большом числе случайных величин их средний результат перестает быть случайным и может быть предсказан с большей степенью определенности.

Под законом больших чисел в *узком* смысле понимается ряд математических теорем, в каждой из которых для тех или иных условий устанавливается факт приближения средних характеристик большого числа испытаний к некоторым определенным постоянным. Прежде чем перейти к этим теоремам, рассмотрим неравенства Маркова и Чебышева.

10.1. Неравенство Маркова (лемма Чебышева)

Теорема. *Если случайная величина X принимает только неотрицательные значения и имеет математическое ожидание, то для любого положительного числа A верно неравенство*

$$P(X > A) \le \frac{M(X)}{A}.$$

Так как события $X > A$ и $X \le A$ противоположенные, то, заменяя $P(X > A)$ выражением $1 - P(X \le A)$, придем к другой форме неравенства Маркова:

$$P(X \le A) \ge 1 - \frac{M(X)}{A}.$$

Пример 10.1. Среднее количество вызовов, поступающих на коммутатор завода в течение часа, равно 300. Оценить вероятность того, что в течение следующего часа число вызовов на коммутатор: а) превысит 400; б) будет не более 500.

Решение. По условию $M(X) = 300.$ Тогда

а) $P(X > 400) \le \dfrac{300}{400} = 0,75,$ т.е. вероятность того, что число вызовов превысит 400, будет не более 0,75;

б) $P(X \le 500) \ge 1 - \dfrac{300}{500} = 0,4,$ т.е. вероятность того, что число вызовов не более 500, будет не менее 0,4.

10.2. Неравенство Чебышева

Теорема. *Для любой случайной величины, имеющей математическое ожидание и дисперсию, справедливо неравенство Чебышева:*

$$P(|X - a| > \varepsilon) \le \frac{D(X)}{\varepsilon^2},$$

где $a = M(X), \varepsilon > 0.$

Учитывая, что события $|X - a| > \varepsilon$ и $|X - a| \le \varepsilon$ противоположные, неравенство Чебышева можно записать в другой форме:

$$P(|X - a| \le \varepsilon) \ge 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Пример 10.2. Номинальное значение диаметра втулки равно 5 мм, а дисперсия, вследствие погрешностей изготовления, не превосходит 0,01. Оценить вероятность того, что размер втулки будет отличаться от номинала не более чем на 0,5 мм.

Решение. Используя неравенство Чебышева, имеем:

$$P(|X - 5| \le 0,5) \ge 1 - \frac{0,01}{0,5^2}.$$

10.3. Теорема Чебышева

Если случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$ *независимы, имеют математические ожидания* $M(X_i)$ *и дисперсии* $D(X_i)$, *ограниченные одним и тем же числом C, то для любого числа* $\varepsilon > 0$ *выполняется неравенство:*

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Из этого неравенства при $n \to \infty$ следует

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| \le \varepsilon\right) = 1.$$

Если все случайные величины $X_i\ (i=\overline{1,n})$ имеют одно и то же математическое ожидание $M(X_i)=a\ (i=\overline{1,n})$, то неравенство из теоремы Чебышева примет вид:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| \le \varepsilon\right) = 1.$$

Смысл теоремы Чебышева

При большом числе *n* случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$ практически достоверно, что их среднее арифметическое $X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ - величина ***случайная***, как угодно мало отличается от ***неслучайной*** величины $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)$, т.е. практически перестает быть случайной.

Пример 10.3. Для определения средней продолжительности горения электроламп в партии из 200 одинаковых ящиков было взято на выборку по одной лампе из каждого ящика. Оценить вероятность того, что средняя продолжительность горения отобранных 200 электроламп отличается от средней продолжительности горения ламп всей партии не более чем на 5 ч (по абсолютной величине), если известно, что среднее квадратическое отклонение продолжительности горения ламп в каждом ящике меньше 7 ч.

Решение. Пусть X_i - продолжительность горения электролампы, взятой из *i*-го ящика. По условию дисперсия $D(X_i) < 7^2 = 49$. Очевидно, что средняя продолжительность горения отобранных ламп равна $(X_1 + X_2 + ... + X_n)/200$, а средняя продолжительность горения ламп во всей партии $(M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n))/200.$

Используем теорему Чебышева. Тогда вероятность искомого события

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i)\right|\le 5\right)\ge 1-\frac{49}{200\cdot 5^2}\approx 0,9902,$$

т.е. не менее чем 0,9902.

Пример 10.4. Сколько надо провести измерений данной величины, чтобы с вероятностью не менее 0,95 гарантировать отклонение средней арифметической этих измерений от истинного значения величины не более чем на 1 (по абсолютной величине), если среднее квадратическое отклонение каждого из измерений не превосходит 5?

Решение. Пусть X_i - результат *i*-го измерения $(i=\overline{1,n})$; a – истинное значение величины, т.е. $M(X_i)=a$ при любом *i.*

Необходимо найти *n,* при котором

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-a\right|\le 1\right)\ge 0,95.$$

Используя теорему Чебышева, получим

$$1-\frac{C}{n\varepsilon^2}=1-\frac{5^2}{n\cdot 1^2}\ge 0,95, \text{ откуда } \frac{25}{n}\le 0,05$$

и $n\ge\dfrac{25}{0,05}=500,$ т.е. потребуется не менее 500 измерений.

10.4. Теорема Бернулли

Если в каждом из n независимых испытаний вероятность p появления события A постоянна, то вероятность того, что отклонение частоты m/n от вероятности p по модулю не превзойдет числа $\varepsilon>0,$ *больше, чем разность* $1-\dfrac{pq}{n\varepsilon^2},$ *т.е.*

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\ge 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=1.$$

Смысл теоремы Бернулли

При большом числе n повторных независимых испытаний практически достоверно, что частота события m/n – величина ***случайная***, как угодно мало отличается от ***неслучайной*** величины p – вероятности события, т.е. практически перестает быть случайной.

Пример 10.5. Сколько следует провести независимых испытаний, чтобы вероятность выполнения неравенства $\left|\frac{m}{n}-p\right|\le 0{,}08$ превысила 0,75, если вероятность появления данного события в отдельном испытании p=0,8?

Решение. По теореме Бернулли получаем

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le 0{,}08\right)>1-\frac{0{,}8\cdot 0{,}2}{n\cdot 0{,}0064}>0{,}75,$$

$$0{,}25>\frac{0{,}16}{0{,}0064n},$$

$$n>100.$$

10.5. Центральная предельная теорема

Рассмотренный выше закон больших чисел устанавливает факт приближения среднего арифметического большого числа случайных величин к определенным постоянным. Но этим не ограничиваются закономерности, возникающие в результате суммарного действия случайных величин. Оказывается, что при некоторых условиях совокупное действие случайных величин приводит к определенному, а именно – к нормальному закону распределения.

Теорема Ляпунова (центральная предельная теорема)

Пусть $X_1, X_2,..., X_n,...$ *- последовательность независимых случайных величин, каждая из которых имеет конечное математическое ожидание* $M(X_i)$ *и конечную дисперсию* $D(X_i)$.

Введем обозначения

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad A_n = \sum_{i=1}^{n} M(X_i), \quad B_n^{\ 2} = \sum_{i=1}^{n} D(X_i).$$

Обозначим функцию распределения нормированной суммы случайных величин через

$$F_n(x) = P\left(\frac{S_n - A_n}{B_n} < x \right).$$

Тогда, если выполнено условие Ляпунова:

$$\forall \delta > 0 \ \ \lim_{n\to\infty} \frac{C_n}{B_n^{2+\delta}} = 0, \quad \text{где} \quad C_n = \sum_{i=1}^{n} M\left(| X_i - M(X_i) |^{2+\delta} \right),$$

то при $n \to \infty$ *функция распределения такой нормированной случайной величины стремится к нормальной функции распределения, т.е. для любого действительного x*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - A_n}{B_n} < x \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2} dz.$$

В частности, если все случайные величины $X_1, X_2,..., X_n,...$ независимы, одинаково распределены, а их дисперсии конечны и отличны от нуля, то центральная предельная теорема для таких величин имеет место, т.е. закон распределения нормированной суммы таких величин в пределе становится нормальным.

Смысл теоремы Ляпунова

Если случайная величина *X* представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то *X* имеет распределение, близкое к нормальному.

Задачи для самостоятельного решения

1. Средний вес клубня картофеля 120 г. Какова вероятность того, что наугад взятый клубень картофеля весит не более 300 г?

   Ответ: $P \geq 0{,}6$.

2. Случайная величина X имеет дисперсию $D(X) = 0{,}01$. Какова вероятность того, что случайная величина X отличается от $M(X) = a$ не более чем на 0,25?

   Ответ: $P \geq 0{,}84$.

3. Для определения средней урожайности поля площадью 1800 га взяли на выборку по $1\,\text{м}^2$ с каждого гектара. Известно, что по каждому гектару поля дисперсия не превышает 6. Оценить вероятность того, что отклонение средней выборочной урожайности отличается от средней урожайности по всему полю не более чем на 0,25 ц.

   Ответ: $P \geq 0{,}947$.

4. Начиная с какого числа n независимых испытаний выполняется неравенство $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < 0{,}1\right) \geq 0{,}97$, если в отдельном испытании $p = 0{,}8$?

   Ответ: $n \geq 534$.

Библиографический список

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. М.: Высшая школа, 2001.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. М.: Высшая школа, 2001.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. М.: Наука, 2001.
4. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика / Н.Ш. Кремер. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2006.
5. Гусак А.А. Теория вероятностей. Справочное пособие к решению задач / А.А. Гусак. Е.А. Бричикова. Минск: ТетраСистемс, 2000.
6. Белько И.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Примеры и задачи / И.В. Белько, Г.П. Свирид. Минск: ООО «Новое знание», 2004.
7. Золотаревская Д.И. Теория вероятностей. Задачи и решения / Д.И. Золотаревская. М.: КомКнига, 2006.
8. Бородин А.Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики / А.Н. Бородин. СПб.: Лань, 2002.

Учебное издание

Гредасова Надежда Викторовна

Теория вероятностей

Редактор *Н.П. Кубыщенко*

Компьютерная верстка *Н.В. Гредасовой*

ИД №06263 от 12.11.2001 г.

Подписано в печать 25.10.2007 Формат 60×84 1/16

Бумага типографская Офсетная печать Усл. печ. л. 4,30

Уч.-изд. л. 3,0 Тираж экз. Заказ

Редакционно-издательский отдел УГТУ-УПИ

620002, Екатеринбург, Мира, 19

ООО «Издательство УМЦ УПИ»

620002, Екатеринбург, Мира, 17